CONTROLE DES CONNAISSANCES EN

MATHEMATIQUES

On rappelle qu'une matrice carrée symétrique réelle [K] de dimension n est dite positive si

$$X^t\,[K]\,X > 0$$

quel que soit le vecteur colonne X de $\mathbb{R}^n$. X^t est le vecteur transposé de X.

$\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et L un réel positif. On note $\mathscr{L}(]0,L[)$ l'ensemble des applications f de [0,L] dans $\mathbb{R}$, intégrables sur]0,L[et telles que $\int_0^L f^2(x)\,dx < +\infty$. On désigne par $\mathscr{H}_4(]0,L[)$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{L}(]0,L[)$ dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à 4 appartiennent à $\mathscr{L}(]0,L[)$. P(x) étant un élément de $\mathscr{L}(]0,L[)$ on considère l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^4W}{dx^4} = P(x) \qquad x \in]0,L[$$

dans laquelle W est un élément de $\mathscr{H}_4(]0,L[)$ satisfaisant aux conditions :

$$(2)\qquad W(0) = 0 \qquad \frac{dW}{dx}(0) = 0$$

$$(3)\qquad \frac{d^2W}{dx^2}(L) = 0 \qquad \frac{d^3W}{dx^3}(L) = 0$$

(I)

I-1) Soient ε et η deux réels tels que $\varepsilon > 0$, $\eta \geq 0$ et $\eta + \varepsilon \leq 1$,

Pour tout entier n positif ou nul, on considère la fonction $f_{n,\varepsilon,\eta}(x)$ définie sur [0,L] par

$$f_{n,\varepsilon,\eta}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \eta L \\ \dfrac{F_0}{\varepsilon^n} & \text{si } \eta L < x \leq (\eta + \varepsilon) L \\ 0 & \text{si } (\eta + \varepsilon) L < x \leq L \end{cases}$$

F_0 étant un réel positif. Tracer le graphe de $f_{n,\varepsilon,\eta}$ et montrer que cette fonction appartient à $\mathscr{L}(]0,L[)$. Calculer la quantité

$$Q_{n,\varepsilon,\eta}(k) = \int_0^L x^k\, f_{n,\varepsilon,\eta}(x)\,dx$$

lorsque k est un entier positif ou nul. Quelle est la limite de $Q_{n,\varepsilon,\eta}(k)$ lorsque ε tend vers 0.

I-2) Déterminer la fonction W(x) vérifiant l'équation différentielle (1) et satisfaisant les conditions (2) et (3) lorsque

$$P(x) = f_{0,1,0}(x)$$

Calculer W(L).

I-3) Si f et g sont deux éléments de $\mathscr{L}(]0,L[)$ montrer que la somme f+g appartient à $\mathscr{L}(]0,L[)$ et en déduire que :

$$\left| \int_0^L f(x)\, g(x)\, dx \right| < +\infty$$

(II)

II-1) Montrer que la matrice

$$[K] = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

est positive et inversible.

II-2) Soient [K] une matrice carrée de dimension n symétrique, positive et inversible et F un élément de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application H de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par l'expression

$$X \in \mathbb{R}^n \longrightarrow H(X) = \frac{1}{2} X^t [K] X - X^t F \in \mathbb{R}$$

et on désigne par X_o la solution du système linéaire :

$$[K]\ X_o = F$$

Calculer $H(X_o+Y)$, $Y \in \mathbb{R}^n$, et en déduire que H(X) passe par un minimum pour $X = X_o$.

(III) u étant un élément de $\mathcal{H}_o(]0,L[)$ et P(x) un élément de $\mathcal{L}(]0,L[)$ on considère l'expression :

(4) $$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2u}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^L P(x)\, u(x)\, dx$$

III-1) Soient V et W deux éléments de $\mathcal{H}_o(]0,L[)$,

- V vérifiant les relations (2)
- W vérifiant les relations (1), (2) et (3).

Calculer E(V+W) et montrer que parmi toutes les fonctions u de $\mathcal{H}_o(]0,L[)$ vérifiant les relations (2), W rend E(u) minimum.

III-2) On désire approcher W(x) par une expression polynomiale

$$\tilde{W}(x) = a\,x^2 + b\,x^3 \qquad x \in [0,L]$$

dépendant du couple de réels $X = (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $E(\tilde{W})$ se met sous la forme matricielle $E(\tilde{W}) = H(X)$, on précisera les matrices [K] et F. Déterminer le couple $X_o = (a_o,b_o)$ rendant $E(\tilde{W})$ minimum. On posera :

$$\tilde{W}_o(x) = a_o\,x^2 + b_o\,x^3$$

III-3) Calculer $\tilde{W}_o(X)$ lorsque $P(x) = f_{0,1,0}(x)$ et comparer $\tilde{W}_o(L)$ avec W(L) trouvé dans la question I-2.

III-4) Déterminer $\tilde{W}_o(L)$ lorsque $P(x) = f_{1,n,\varepsilon}$ et calculer la limite de $\tilde{W}_o(x)$ lorsque ε tend vers 0.

(IV) On considère l'équation différentielle

(5) $$\frac{d^4y}{dx^4} - \lambda^4 y = 0 \qquad x \in]0,L[$$

dans laquelle λ est un réel et y un élément de $\mathcal{H}_o(]0,L[)$ vérifiant les conditions :

(6) $y(0) = 0$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}(0) = 0$

(7) $\frac{d^2y}{dx^2}(L) = 0$ $\qquad$ $\frac{d^3y}{dx^3}(L) = 0$

IV-1) Montrer que toute combinaison linéaire de fonctions circulaires et hyperboliques de l'argument λx vérifie l'équation (5). En déduire que les seules fonctions y non nulles vérifiant les relations (5), (6) et (7) sont les fonctions $\phi(x)$ pour lesquelles $\beta = \lambda L$ est solution de l'équation :

(8) $\Gamma(\beta) = 1 + \text{ch } \beta \cos \beta = 0$

Exprimer alors $\phi(x)$.

IV-2) Tracer sur le même diagramme les graphes des fonctions :

$$f_1(\beta) = \cos \beta$$

$$f_2(\beta) = \frac{-1}{\text{ch } \beta}$$

pour $\beta \in [0,10]$ (1 unité = 1 cm en abscisse, 1 unité = 10 cm en ordonnées). Donner une valeur approchée des 3 premières racines β_0, β_1, et β_2 de l'équation (8) à 1% près.

IV-3) Montrer que $\Gamma(\beta)$ change de signe une fois et une seule lorsque β décrit l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. En déduire que l'équation $\Gamma(\beta)=0$ admet un nombre dénombrable de racines β_k, $k \in \mathbb{N}$. Estimer β_k lorsque k est grand.

IV-4) On désigne par $\phi_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, la fonction $\phi(x)$, lorsque $\beta = \beta_k = \lambda_k L$. Montrer que :

$$\int_0^L \frac{d^4\phi_p(x)}{dx^4} \cdot \phi_q(x)\, dx = \int_0^L \frac{d^4\phi_q(x)}{dx^4} \cdot \phi_p(x)\, dx$$

et en déduire l'égalité :

$$\int_0^L \phi_p(x).\phi_q(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } p \neq q$$

IV-5) On considère la suite de réels A_k, $k \in \mathbb{N}$ et on désire approcher $W(x)$ solution des équations (1), (2) et (3) par une expression de la forme :

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k \phi_k(x)$$

On pose

$$\Delta(W_n) = \int_0^L \left(\frac{d^4W_n}{dx^4} - P(x)\right)^2 dx$$

Déterminer les valeurs α_k de A_k, $k = 0,1,..,n$ rendant $\Delta(W_n)$ minimum pour n fixé .

IV-6) Quelles réflexions vous inspirent les parties III et IV du problème ?